Soluciones Ejercicios Aplicaciones de las Derivadas III

13 **Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la función f en el punto de abscisa indicado en cada caso.**

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ **en** $x = 2$

b) $f(x) = \sqrt{x+1}$ **en** $x = 3$

c) $f(x) = \dfrac{2-x}{x^3}$ **en** $x = -1$

d) $f(x) = \ln x$ **en** $x = e^2$

e) $f(x) = sen\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ **en** $x = \dfrac{\pi}{3}$

a) $f'(x) = 2x - 5$

$f(2) = 0$

$f'(2) = -1$

La recta tangente es $y = -1(x-2) + 0$, es decir, $y = -x + 2$

La recta normal es $y = \dfrac{-1}{-1}(x-2)+0$, es decir, $y = x - 2$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$f(3) = 2$

$f'(3) = \dfrac{1}{4}$

La recta tangente es $y = \dfrac{1}{4}(x-3) + 2$, es decir, $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4}$

La recta normal es $y = \dfrac{-1}{1/4}(x-3)+2$, es decir, $y = -4x + 14$

c) $f'(x) = \dfrac{-1\cdot x^3 - (2-x)\cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \dfrac{2x-6}{x^4}$

$f(-1) = -3$

$f'(-1) = -8$

La recta tangente es $y = -8(x+1) - 3$, es decir, $y = -8x - 11$

La recta normal es $y = \dfrac{-1}{-8}(x+1) - 3$, es decir, $y = \dfrac{1}{8}x - \dfrac{23}{8}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f(e^2) = 2$

$f'(e^2) = \dfrac{1}{e^2}$

La recta tangente es $y = \dfrac{1}{e^2}(x - e^2) + 2$, es decir, $y = \dfrac{1}{e^2}x + 1$

La recta normal es $y = \dfrac{-1}{1/e^2}(x-e^2)+2$, es decir, $y = -e^2x + e^4 - 2$

e) $f'(x) = cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

La recta tangente es $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{2}$

La recta normal es $y = \dfrac{-1}{-\sqrt{3}/2}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{2}$, es decir, $y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{2}$

14 **Halla los puntos en los que la pendiente de la recta tangente a cada una de las siguientes funciones es igual a 2:**

a) $y = x^2 - 2x$

b) $y = \dfrac{x}{x+2}$

c) $y = 4\sqrt{x+3}$

d) $y = ln\,(4x - 1)$

a) $f'(x) = 2x - 2$

$f'(x) = 2 \rightarrow 2x - 2 = 2 \rightarrow x = 2$

b) $f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x+2) - x \cdot 1}{(x+2)^2} = \dfrac{2}{(x+2)^2}$

$f'(x) = 2 \rightarrow \dfrac{2}{(x+2)^2} = 2 \rightarrow (x+2)^2 = 1 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -3$

c) $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+3}}$

$f'(x) = 2 \rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{x+3}} = 2 \rightarrow \sqrt{x+3} = 1 \rightarrow x = -2$

d) $f'(x) = \dfrac{4}{4x-1}$

$f'(x) = 2 \rightarrow \dfrac{4}{4x-1} = 2 \rightarrow 4x - 1 = 2 \rightarrow x = \dfrac{3}{4}$

15 **Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta tangente a f, que sea paralela a la recta dada.**

a) $f(x) = x^2 + 4x + 1$ **paralela a** $2x + y + 1 = 0$

b) $f(x) = x^3 - 3x$ **paralela a** $y = 6x + 10$

c) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$ **paralela a** $5x - y = 0$

a) $2x + y + 1 = 0 \rightarrow y = -2x - 1$

Por tanto, la recta tangente debe tener pendiente -2 para que sea paralela.

$f'(x) = 2x + 4$

$f'(x) = -2 \rightarrow 2x + 4 = -2 \rightarrow x = -3$

$f(-3) = -2$ y la recta tangente es $y = -2(x+3) - 2$.

b) La recta tangente debe tener pendiente 6 para que sea paralela.

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 6 \rightarrow 3x^2 - 3 = 6 \rightarrow x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = \sqrt{3}$

Si $x = -\sqrt{3} \rightarrow f(-\sqrt{3}) = 0$

La recta tangente en $x = -\sqrt{3}$ es $y = 6(x + \sqrt{3})$

Si $x = \sqrt{3} \rightarrow f(\sqrt{3}) = 0$

La recta tangente en $x = \sqrt{3}$ es $y = 6(x - \sqrt{3})$

c) $5x - y = 0 \rightarrow y = 5x$

Por tanto, la recta tangente debe tener pendiente 5 para que sea paralela.

$f'(x) = \dfrac{(x+2) - (x-3)}{(x+2)^2} = \dfrac{5}{(x+2)^2}$

$f'(x) = 5 \rightarrow \dfrac{5}{(x+2)^2} = 5 \rightarrow (x+2)^2 = 1 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -3$

Si $x = -1 \rightarrow f(-1) = -4$

La recta tangente en $x = -1$ es $y = 5(x+1) - 4$

Si $x = -3 \rightarrow f(-3) = 6$

La recta tangente en $x = -3$ es $y = 5(x+3) + 6$

Recta tangente es: $y = 5x + 21$

16 **Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes y de las rectas normales a la función $y = 4 - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.**

Los puntos de corte con el eje de abscisas se obtienen haciendo $y = 0$.

$y = 0 \rightarrow 4 - x^2 = 0 \rightarrow x = -2,\ x = 2$

$f'(x) = -2x$

Si $x = -2 \rightarrow f'(-2) = 4$. La recta tangente en $x = -2$ es $y = 4(x + 2)$

Si $x = 2 \rightarrow f'(2) = -4$. La recta tangente en $x = 2$ es $y = -4(x - 2)$

Las rectas normales son: en $x = -2$, $y = -\frac{1}{4}(x + 2)$ y en $x = 2$, $y = \frac{1}{4}(x - 2)$.

Aplicaciones de las derivadas III (4 al 10 mayo)

1.- Ec de la tangente a la curva $f(x) = \ln x - 7$ paralela a la recta $x - y = 5$

Por ser paralela tiene la misma pendiente.

$x - y = 5 \Rightarrow y = x - 5$ pendiente $m = 1$

Ec de la recta tangente es $y - y_0 = \underbrace{f'(x_0)}_{m}(x - x_0)$

$f(x) = \ln x - 7$

$f'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(x_0) = \frac{1}{x_0} = m = 1$

$\frac{1}{x_0} = 1 \Rightarrow x_0 = 1.$

Si $x_0 = 1$ entonces $f(x_0) = y_0 = \ln 1 - 7 = 0 - 7 = -7$

Es decir Pto $(1, -7)$ pendiente 1.

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$y - (-7) = 1(x - 1)$ $\quad y + 7 = x - 1$

$\boxed{y = x - 8}$

2.- $f(x) = \sqrt{x-1}$ en $x = 1$.

Calculo el pto

$x_0 = 1 \quad f(x_0) = \sqrt{1-1} = \sqrt{1} = 1 \quad$ pto $(x_0, y_0) = (1, 1)$

Veo la pendiente $\underbrace{f'(x_0)}_{m} = f'(1)$?

$f'(x)$? $\quad f(x) = x^{-1/2} \quad f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \quad f'(1) = -\frac{1}{2}$ pendiente

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 1$

$\boxed{y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}$

3.- $f(x)=4x\cdot\ln(x)$ $x>0$

a) Mínimo? Para calcular máximos y mínimos calculo la primera derivada y la igualo a cero. $f(x)=4x\cdot\ln(x)$

$$f'(x)=4\cdot\ln x+4x\cdot\frac{1}{x}=4\ln x+4$$

$f'(x)=0$ $4\ln x+4=0$ $4\ln x=-4$ $\ln x=-1$

Por definición de ln $e^{-1}=x$

ó introducimos e en ambos términos $\cancel{e}^{\ln x}=e^{-1}$ $x=e^{-1}$

	$+0$		e^{-1} (Mínimo)		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		↘		↗	

Comprobación de que es mínimo.

b) Ec recta tangente $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

Nos dan $(x_0,y_0)=(1,0)$

Calculo la pendiente. $f(x)=4x\ln(x)$

$f'(x)=4\ln x+4 \rightarrow f'(x_0)=f'(1)=0+4=4$

Así $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

$y-0=4(x-1)$ $\boxed{y=4x-4}$