Halla la función derivada de las siguientes funciones:

2 $f(x) = 5x^2 + 7x - 2\sqrt{x}$

$$f'(x) = 5 \cdot 2x + 7 - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 10x + 7 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

3 $f(x) = \sqrt{3x^3} \cdot e^x$

$$f(x) = \sqrt{3}\,\sqrt{x^3}\,e^x = \sqrt{3}\,x^{3/2}\,e^x$$

$$f'(x) = \sqrt{3}\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\,e^x + x^{3/2}\,e^x\right) = \sqrt{3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\,e^x + x\sqrt{x}\,e^x\right) = \sqrt{3x}\,e^x\left(\frac{3}{2} + x\right)$$

4 $f(x) = \dfrac{e^x \cdot \cos x}{2^{x+4}}$

$$f(x) = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x \cos x}{2^x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{(e^x \cos x - e^x\, sen\, x)\,2^x - e^x \cos x\, 2^x \ln 2}{(2^x)^2} = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x \cos x - e^x\, sen\, x - e^x \cos x \ln 2}{2^x} =$$

$$= \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x(\cos x - sen\, x - \ln 2 \cos x)}{2^x}$$

5 $f(x) = x \cdot 3^x \cdot tg\, x$

$$f'(x) = 3^x \cdot tg\, x + x \cdot 3^x \ln 3 \cdot tg\, x + \frac{x \cdot 3^x}{\cos^2 x}$$

6 $f(x) = \dfrac{\log_2 x}{x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 2} \cdot x - lon_2\, x \cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{1}{\ln 2} - \log_2 x}{x^2} = \frac{1 - \ln 2 \log_2 x}{x^2 \ln 2}$$

7 $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x + 3}{x^2}$

$$f(x) = 2x - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} = 2x - 5 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot x^{-2}$$

$$f'(x) = 2 + \frac{5}{x^2} + 3 \cdot (-2)\,x^{-3} = 2 + \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3}$$

8 $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1)\,2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

9 $f(x) = (sen\, x)\left(x^2 + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = (\cos x)\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right) + (sen\, x)\,(2x)$$

10 $f(x) = \dfrac{2^x}{\cos x}$

$$f'(x) = \frac{2^x \cdot \ln 2 \cdot \cos x - 2^x(-sen\, x)}{\cos^2 x} = \frac{2^x(\ln 2 \cdot \cos x + sen\, x)}{\cos^2 x}$$

11 $f(x) = \dfrac{x^2 \cdot 5^x}{x^3}$

$f(x) = \dfrac{1}{x} 5^x$

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} 5^x + \dfrac{1}{x} 5^x \ln 5 = 5^x \dfrac{x \ln 5 - 1}{x^2}$

Página 193

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

12 $f(x) = sen\,(x^2 - 5x + 7)$

$f'(x) = (2x - 5)\ cos\,(x^2 - 5x + 7)$

13 $f(x) = \sqrt[3]{(5x+3)^2} = (5x + 3)^{2/3}$

$f'(x) = \dfrac{2}{3}(5x+3)^{-1/3} \cdot 5 = \dfrac{10}{3\sqrt[3]{5x+3}}$

14 $f(x) = sen^2\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$D\left(sen^2\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\right) = \begin{cases} (\square^2)' = 2\square \\ (sen\,\square)' = cos\,\square \\ \left(3x + \frac{\pi}{2}\right)' = 3 \end{cases}$$

$f'(x) = 2sen\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right) cos\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right) \cdot 3 = 6sen\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right) cos\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

También, usando la fórmula del seno del ángulo doble, podríamos dar el resultado de esta otra manera:

$f'(x) = 2sen\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right) cos\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right) \cdot 3 = 3sen\,(6x + \pi) = -3\ sen\ 6x$

15 $f(x) = \dfrac{log\ x^2}{x}$

$f(x) = \dfrac{2\ log\ x}{x} \ \to\ f'(x) = \dfrac{2(1 - \ln 10\ log\ x)}{x^2 \ln 10}$

16 $f(x) = cos\,(3x - \pi)$

$f'(x) = -3\ sen\,(3x - \pi)$

17 $f(x) = \sqrt{1+2x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$

18 $f(x) = x\,e^{2x+1}$

19 $f(x) = \dfrac{sen\,(x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x) = \dfrac{2x\sqrt{1-x^2}\ cos\,(x^2+1) + [x\ sen\,(x^2+1)]/\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} = \dfrac{2x(1-x^2)\ cos\,(x^2+1) + x\ sen\,(x^2+1)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

Ejercicios y problemas propuestos

Página 205

9 Halla la función derivada de las siguientes funciones y simplifica cuando sea posible:

a) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 7x^2 - 4x$

b) $f(x) = 3e^{2x}$

c) $f(x) = \frac{1}{3x} + \sqrt{x}$

d) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

e) $f(x) = \frac{1}{7x+1} + \frac{\sqrt{2x}}{3}$

f) $f(x) = ln\,(x^2 + 3x)$

g) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$

h) $f(x) = ln\,3x + e^{-x}$

i) $f(x) = \frac{e^{x-3}}{5}$

j) $f(x) = \left(\frac{3-x}{x}\right) log_2\, x$

a) $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 7 \cdot 2x - 4 = x^2 + 14x - 4$

b) $f'(x) = 3e^{2x} \cdot 2 = 6e^{2x}$

c) $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{3x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $f'(x) = \frac{2x \cdot (x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$

e) Teniendo en cuenta que $\frac{\sqrt{2x}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{x}$:

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (7x+1) - 1 \cdot 7}{(7x+1)^2} + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-7}{(7x+1)^2} + \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{x}}$$

f) $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 3x} \cdot (2x + 3) = \frac{2x+3}{x^2 + 3x}$

g) $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot x - \sqrt{x+1}}{x^2} = \frac{x - 2(x+1)}{2x^2\sqrt{x+1}} = \frac{-x-2}{2x^2\sqrt{x+1}}$

h) $f(x) = ln\,3 + ln\,x + e^{-x}$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + e^{-x}(-1) = \frac{1}{x} - e^{-x}$$

i) $f'(x) = \frac{e^{x-3}}{5}$

j) $f'(x) = \frac{(-1)x - (3-x)}{x^2} log_2\, x + \frac{3-x}{x} \cdot \frac{1}{x\, ln\, 2} = \frac{-3\, log_2\, x}{x^2} + \frac{3-x}{x^2\, ln\, 2} = \frac{1}{x^2}\left(-3\, log_2\, x + \frac{3-x}{ln\, 2}\right)$

10 Aplica las reglas de derivación y simplifica si es posible.

a) $f(x) = (5x-2)^3$

b) $f(x) = 3\cos(x+\pi)$

c) $f(x) = sen\,\dfrac{x}{2}$

d) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+7}{x}}$

f) $f(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^3 \cdot e^{2x+1}$

g) $f(x) = tg\,(3x)$

h) $f(x) = x \cdot sen\,x^2$

i) $f(x) = \sqrt{7 \cdot \ln x}$

j) $f(x) = (x + \ln x)^2$

a) $f'(x) = 3(5x-2)^2 \cdot 5 = 15(5x-2)^2$

b) $f'(x) = -3sen\,(x+\pi)$

c) $f'(x) = \cos\dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}$

d) $f(x) = \dfrac{e^x(1+e^{-2x})}{e^x} = 1 + e^{-2x}$

$f'(x) = e^{-2x} \cdot (-2) = -2e^{-2x}$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+7}{x}}} \cdot \dfrac{x-(x+7)}{x^2} = \dfrac{-7}{2x^2}\sqrt{\dfrac{x}{x+7}}$

f) $f'(x) = \dfrac{3x^2}{8}e^{2x+1} + \dfrac{x^3}{8}e^{2x+1} \cdot 2 = \dfrac{e^{2x+1}}{8}(2x^3 + 3x^2)$

g) $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(3x)} \cdot 3 = \dfrac{3}{\cos^2(3x)}$

h) $f'(x) = sen\,x^2 + x\cos x^2 \cdot 2x = sen\,x^2 + 2x^2\cos x^2$

i) $f'(x) = \sqrt{7} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{7}}{2x\sqrt{\ln x}}$

j) $f'(x) = 2(x + \ln x)\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 2\left(x + 1 + \ln x + \dfrac{\ln x}{x}\right)$

11 Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt[3]{e^x + 1}$

b) $f(x) = \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2$

c) $f(x) = \dfrac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$

d) $f(x) = \left(\dfrac{3x}{1-x^2}\right)^2$

e) $f(x) = \dfrac{x}{3}\log_2(1-x^2)$

f) $f(x) = e^{-x}\ln\dfrac{1}{x}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{(5x+2)^2}$

h) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{4x} - \dfrac{x}{2}\right)$

a) $f(x) = (e^x + 1)^{1/3}$

a) $f(x) = (e^x + 1)^{1/3}$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(e^x+1)^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(e^x+1)^2}}$$

b) $f'(x) = 2\frac{\ln x}{x} \cdot \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{2\ln x\,(1-\ln x)}{x^3}$

c) $f(x) = -3(1-x^2)^{-1/2}$

$$f'(x) = -3\left(-\frac{1}{2}\right)(1-x^2)^{-3/2}\cdot(-2x) = \frac{-3x}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{-3x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

d) $f'(x) = 2\cdot\frac{3x}{1-x^2}\cdot\frac{3(1-x^2)-3x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{6x(3x^2+3)}{(1-x^2)^3} = \frac{18x(x^2+1)}{(1-x^2)^3}$

e) $f'(x) = \frac{1}{3}\log_2(1-x^2) + \frac{x}{3}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{\ln 2}\cdot(-2x) = \frac{\log_2(1-x^2)}{3} - \frac{2x^2}{3(1-x^2)\ln 2}$

f) $f(x) = e^{-x}(-\ln x) = -e^{-x}\ln x$

$$f'(x) = -\left(-e^{-x}\ln x + e^{-x}\cdot\frac{1}{x}\right) = e^{-x}\left(\ln x - \frac{1}{x}\right)$$

g) $f(x) = (5x+2)^{2/3}$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(5x+2)^{-1/3}\cdot 5 = \frac{10}{3\sqrt[3]{5x+2}}$$

h) $f(x) = \ln\left(\frac{1-2x^2}{4x}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{1-2x^2}{4x}}\cdot\frac{-4x\cdot 4x-(1-2x^2)\cdot 4}{(4x)^2} = \frac{4x}{1-2x^2}\cdot\frac{-8x^2-4}{(4x)^2} = \frac{-4(2x^2+1)}{4x(1-2x^2)} = \frac{2x^2+1}{x(2x^2-1)}$$

Las derivadas de los logaritmos pueden hacerse así o utilizando primero las propiedades de los logaritmos .

$f(x) = \ln(1-2x^2) - \ln(4x)$; $f'(x) = \frac{-4x}{1-2x^2} - \frac{4}{4x}$ = operaríamos ...