Página 202

7. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

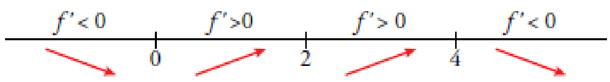
Hazlo tú. **Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función** $f(x) = \dfrac{x^2}{2-x}$.

$Dom = \mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{2x(2-x) - x^2(-1)}{(2-x)^2} = \frac{4x - x^2}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \frac{4x - x^2}{(x-2)^2} = 0 \;\rightarrow\; 4x - x^2 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0,\; x_2 = 4$$

Estudiamos los signos de f dentro del dominio de definición en los intervalos cuyos extremos son los puntos singulares.



Por tanto, f crece en $(0, 2) \cup (2, 4)$ y decrece en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento

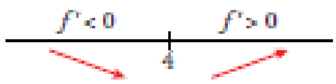
18 **Halla, en cada caso, los puntos singulares de la función y determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.**

a) $f(x) = x^2 - 8x + 3$ **b)** $f(x) = 12x - 3x^2$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2$

d) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$ **e)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ **f)** $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

a) $f'(x) = 2x - 8$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x - 8 = 0 \;\rightarrow\; x = 4$

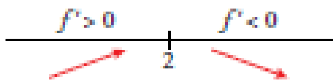


Como $f(4) = -5$, el punto $(4, -5)$ es un punto singular.

Intervalo de crecimiento, $(4, +\infty)$. Intervalo de decrecimiento, $(-\infty, 4)$.

b) $f'(x) = 12 - 6x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 12 - 6x = 0 \;\rightarrow\; x = 2$



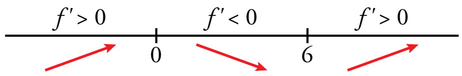
Como $f(2) = 12$, el punto $(2, 12)$ es un punto singular.

Intervalo de crecimiento, $(-\infty, 2)$. Intervalo de decrecimiento, $(2, +\infty)$.

c) $f'(x) = x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 6$

Como $f(0) = 0$ y $f(6) = -36$, los puntos $(0, 0)$ y $(6, -36)$ son puntos singulares.

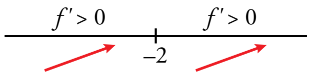


Intervalos de crecimiento, $(-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$. Intervalo de decrecimiento, $(0, 6)$.

d) $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 12x + 12 = 0 \rightarrow x = -2$

Como $f(-2) = -8$, el punto $(-2, -8)$ es un punto singular.



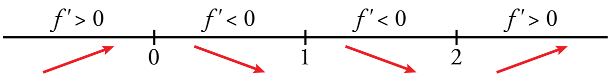
Intervalo de crecimiento, $\mathbb{R}$.

e) $Dom = \mathbb{R} - \{1\}$

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 2$

Como $f(0) = 0$ y $f(2) = 4$, los puntos $(0, 0)$ y $(2, 4)$ son puntos singulares.



Intervalos de crecimiento, $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Intervalos de decrecimiento, $(0, 1) \cup (1, 2)$.

f) $Dom = \mathbb{R} - \{-2\}$

$f'(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2}$

No tiene puntos singulares. Como $f'(x) > 0$ siempre que $x \neq -2$ y la función no está definida en $x = -2$, los intervalos de crecimiento son $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

19 Comprueba que las siguientes funciones no tienen puntos singulares y determina los intervalos donde crecen o decrecen:

a) $y = x^3 + 3x$ **b)** $y = \dfrac{1}{x}$ **c)** $y = \sqrt{x}$ **d)** $y = \ln x$

a) $f'(x) = 3x^2 + 3$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 3 = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) > 0$, la función es creciente en todo $\mathbb{R}$.

b) $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow -\dfrac{1}{x^2} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) < 0$ siempre que $x \neq 0$ y no está definida en $x = 0$, los intervalos de decrecimiento son $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

c) $Dom = [0, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) > 0$ siempre que $x \neq 0$, el intervalo de crecimiento es $[0, +\infty)$.

d) $Dom = (0, +\infty)$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{x} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) > 0$ en su dominio de definición, el intervalo de crecimiento es $(0, +\infty)$.

20 **Halla los puntos singulares de las siguientes funciones y, con ayuda de las ramas infinitas, determina si son máximos o mínimos:**

a) $y = x^3 - 2x^2 + x + 2$

b) $y = 3x^2 - x^3$

c) $y = x^4 - 8x^2 + 10$

d) $y = -3x^4 - 12x$

e) $y = \frac{3}{x^2+1}$

f) $y = \frac{x^3+4}{x}$

a) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3},\ x = 1$

Como $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{58}{27}$ y $f(1) = 2$, los puntos $\left(\frac{1}{3}, \frac{58}{27}\right)$ y $(1, 2)$ son puntos singulares.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\end{array}\right\}$$ Por tanto $\left(\frac{1}{3}, \frac{58}{27}\right)$ es un máximo y $(1, 2)$ es un mínimo.

b) $f'(x) = 6x - 3x^2$

$f'(x) = 0 \rightarrow 6x - 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 2$

Como $f(0) = 0$ y $f(2) = 4$, los puntos $(0, 0)$ y $(2, 4)$ son puntos singulares.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty\end{array}\right\}$$ Por tanto, $(0, 0)$ es un mínimo y $(2, 4)$ es un máximo.

c) $f'(x) = 4x^3 - 16x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 16x = 0 \rightarrow x = -2,\ x = 0,\ x = 2$

Como $f(-2) = -6$, $f(0) = 10$ y $f(2) = -6$, los puntos $(-2, -6)$, $(0, 10)$ y $(2, -6)$ son puntos singulares.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\end{array}\right\}$$ Por tanto, $(-2, -6)$ y $(2, -6)$ son mínimos.

El punto $(0, 10)$ debe ser un máximo porque está entre dos mínimos.

d) $f'(x) = -12x^3 - 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow -12x^3 - 12 = 0 \rightarrow x = -1$

Como $f(-1) = 9$ el punto $(-1, 9)$ es un punto singular.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty\end{array}\right\}$$ Por tanto, $(-1, 9)$ es un máximo.

e) $f'(x) = \dfrac{-6x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \;\to\; \dfrac{-6x}{(x^2+1)^2} = 0 \;\to\; x = 0$

Como $f(0) = 3$, el punto (0, 3) es un punto singular.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\}$ Por tanto, (0, 3) es un máximo.

f) $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = 2x - \dfrac{4}{x^2}$

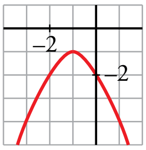
$f'(x) = 0 \;\to\; 2x - \dfrac{4}{x^2} = 0 \;\to\; x = \sqrt[3]{2}$

Como $f\left(\sqrt[3]{2}\right) = 3\sqrt[3]{4}$, el punto $\left(\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{4}\right)$ es un punto singular.

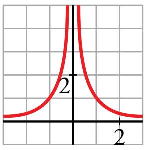
$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ Por tanto, $\left(\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{4}\right)$ es un mínimo.

21 **Indica en cada una de estas funciones los valores de x en los que f' es positiva y en los que f' es negativa:**

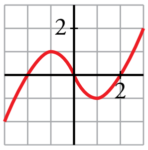
a)



b)



c)



a) $f' > 0$ si $x < -1$

$f' < 0$ si $x > -1$

b) $f' > 0$ si $x < 0$

$f' < 0$ si $x > 0$

c) $f' > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$f' < 0$ si $x \in (-1, 1)$

Gráficas de funciones polinómicas y racionales

22 **Representa una función $y = f(x)$ de la que conocemos:**

- **Dominio de definición: $\mathbb{R} - \{0\}$**
- **Corta al eje X en $x = 1$.**
- **Asíntota horizontal: $y = 0$**

  Si $x \to +\infty$, $f(x) < 0$

  Si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$
- **Asíntota vertical: $x = 0$**

  Si $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$

  Si $x \to 0^-$, $f(x) \to -\infty$
- **Mínimo en (2, –1).**