LIMITES DE FUNCIONES EN UN PUNTO. Segunda parte

Continuamos con límites.

A veces hay indeterminaciones al sustituir la x por un valor concreto. Las indeterminaciones que vamos a estudiar son: $\frac{a}{0}$ y $\frac{0}{0}$

INDETERMINACIÓN $\frac{a}{0}, a \in \mathbb{R}$

Este resultado siempre es $+\infty$ o $-\infty$. Pero a priori no sabemos cuál de los dos es, por eso decimos que es indeterminado.

Para hacerlo, debemos calcular los límites por la izquierda y por la derecha.

Vamos con ejemplos:

1. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

Este es el más sencillo de todos. Veamos:

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0}$ INDETERMINADO

Hacemos, entonces, los límites laterales:

a) LÍMITE POR LA IZQUIERDA: $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-}$

b) LÍMITE POR LA DERECHA: $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+}$

¿Qué significan $0^- y\ 0^+$? Son valores MUY CERCANOS A 0, SIN LLEGAR A SER 0. Vamos a llamarlo "casi 0". Tenemos por lo tanto 0^+, que es un "casi 0 positivo" y 0^-, "casi 0 negativo". (OJO, esto no es una nomenclatura matemática, es una forma de hablar. ¡Ni se os ocurra poner eso en los ejercicios!)

0^- sería un valor muy muy muy próximo a 0 pero negativo, por ejemplo

-0'0000000000000000000001

Y 0^+ será lo mismo pero positivo, 0'000000000000000000000001

Así que lo que hay que hacer es tener mucho cuidado con los signos

a) LÍMITE POR LA IZQUIERDA: $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

b) LÍMITE POR LA IZQUIERDA: $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

En este caso, $\nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ porque los límites laterales no son iguales

(Para hacer los límites laterales podéis sustituir x por un número muy próximo a 0, negativo para el límite por la izquierda y positivo para el límite por la derecha y estudiar el signo del resultado, pero yo creo que es más fácil entender el "casi 0")

2. $\lim_{x\to 2}\frac{5}{x-2}$

$\lim_{x\to 2}\frac{5}{x-2}=\frac{5}{2-2}=\frac{5}{0}$ INDETERMINADO

a) LÍMITE POR LA IZQUIERDA: $\lim_{x\to 2^-}\frac{5}{x-2}=\frac{5}{2^- -2}=\frac{5}{0^-}=-\infty$

Fijaos 2^- es “casi 2”, es decir es un número muy próximo a 2, pero MÁS PEQUEÑO que 2. Por lo tanto $2^- - 2$ es un número NEGATIVO muy cercano a 0, un “casi 0”, 0^-

Podemos razonar de forma parecida para 2^+ , y entonces

b) LÍMITE POR LA DERECHA: $\lim_{x\to 2^+}\frac{5}{x-2}=\frac{5}{2^+ -2}=\frac{5}{0^+}=+\infty$

Como los límites laterales son distintos

$$\nexists \lim_{x\to 2}\frac{5}{x-2}$$

3. $\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}\right)^2$

$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}\right)^2=\left(\frac{1}{3-3}\right)^2=\left(\frac{1}{0}\right)^2=(\pm\infty)^2=+\infty$

Aquí no es indeterminado, no hay que hacer límites laterales.

INDETERMINACIÓN $\frac{0}{0}$

En límites de funciones racionales $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde P(x) y Q(x) son polinomios, aparece esta indeterminación:

$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=\frac{0}{0}$ INDETERMINADO

En este caso, al ser $P(x_0)=0$ y $Q(x_0)=0$, tenemos, por el teorema del factor, que P(x) y Q(x) son DIVISIBLES ENTRE $x-x_0$. Es decir que P(x) y Q(x) se pueden expresar como $x-x_0$ multiplicado por otro polinomio. (VOLVEMOS A LA PRIMERA EVALUACIÓN, TEMA 3). Hacemos la división (utilizando la regla de Ruffini, por ejemplo), expresamos los polinomios como producto de $x-x_0$ por el cociente de la división, se simplifica la fracción y después se hace el límite.

Mejor con ejemplos:

1. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}=\frac{1^2-3\cdot 1+2}{1^2+1-2}=\frac{0}{0}$ INDETERMINADO

Descomponemos numerador y denominador

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x+2}=\frac{1-2}{1+2}=\frac{-1}{3}$$

Mirad bien, hay que simplificar ANTES DE VOLVER A SUSTITUIR

Y siempre uno de los factores es $x-x_0$. En este caso el factor es x-1.

2. $\lim_{x\to 2}\frac{3x-6}{x^2-4x+4}$

A veces al quitar la indeterminación $\frac{0}{0}$ aparece $\frac{a}{0}$. Nos toca en un mismo ejercicio salvar dos indeterminaciones.

Vamos allá:

$\lim_{x\to 2}\frac{3x-6}{x^2-4x+4}=\frac{3\cdot 2-6}{2^2-4\cdot 2+4}=\frac{0}{0}$ INDETERMINADO

$\lim_{x\to 2}\frac{3x-6}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{3}{x-2}=\frac{3}{0}$ IND.

Ahora hay que hacer los límites laterales, pero del que nos ha salido al simplificar la fracción:

a) LÍMITE POR LA IZQUIERDA: $\lim_{x\to 2^-}\frac{3}{x-2}=\frac{3}{2^- -2}=\frac{3}{0^-}=-\infty$
b) LÍMITE POR LA DERECHA: $\lim_{x\to 2^+}\frac{3}{x-2}=\frac{3}{2^+ -2}=\frac{3}{0^+}=+\infty$

Por lo tanto $\nexists \lim_{x\to 2}\frac{3}{x-2} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 2}\frac{3x-6}{x^2-4x+4}$